数理解析研究所講究録
687巻 1989年 85-108

正則多値論理関数

明治大学　　高木　昇　（Noboru Takagi）
明治大学　　向殿　政男（Masao Mukaidono）

1. まえがき

従来の古典理論（2値論理）では，真偽不定ということは論外におかれ，すべての命題の真理値は真（1）か偽（0）いずれかの値を取るという仮定のもとに論議が進められている．しかし，実社会においては，真偽の決定していない場合も少なくない．真理値が1，0以外を取る多値論理体系では，実社会における真偽不定の命題も多少は取り扱うことができ，その適用範囲も古典論理に比べて拡張されている．

一般に，n変数のm値論理関数は入力ベクトルm^n個上で考察され，この論理関数の総数はm^{m^n}個となり，その数は極めて多くなる．このため，意味のある集合族，つまりすべての論理関数からなる集合のある意味を持った部分集合を取り扱う研究が数多くなされてきた．本論文では，真偽不定つまり“あいまいさ”を取り扱うための一手段となる正則多値論理関数につ

いて述べる.真(1)と偽(0)の他に,不確定を表す第三の真理値(1/2)を導入することにより,あいまいさを取り扱うのに適した3値論理として最初に考察されたのはB-3値論理関数[1]についてであった.B-3値論理関数の多値論理への拡張については,すでに文献(1)で二つの方向が示されていた.一つはm個の真理値のうちでどの真理値であるか不明であることを表すような新しい真理値を添加することにより導かれる多値論理関数である.m = 2の場合がB(Bynaritic)-3値論理関数である.この方向についての拡張は,現在までのところ,m値以外の真理値を唯一つ追加した(m+1)値論理として,その完全性が論じられているにすぎない[2].もう一方の拡張の方向は,真理値の集合に0と1以外に$x \in A$及び$1-x \in A$を満たすいくつかのxを添加し,論理記号∨(OR),・(AND)及び~(NOT)をそれぞれmax,min及び(1-)と解釈することにより論理式が表現する論理関数として考察するものである.例えば,$i/(m-1)$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$なるm値論理や,$0 \leq x \leq 1$なる有理数の集合又は実数の集合が考えられる.実数の場合には,fuzzy論理関数と呼ばれている[3],[4].更に,この拡張方向には,論理式に0と1以外の定数を許すことが考えられ,B-3値論理関数において,論理式に定数として1/2を導入したものが正則3値論理関数[5]であり,fuzzy論理関数

に任意の定数を導入したものが定数係数を持ったｆｕｚｚｙ論理関数の研究である[6]．なお，正則３値論理関数の部分集合として，２値（０，１）の入力のみですべての値が決定され，しかもあいまいな入力情報を訂正することができるＰ形論理関数があり，これについてもその性質[7]，及び応用[8]が研究されている．山本らの多数決関数[9]も，このＰ形論理関数の特殊なものであり，これらの関数の関係が３値しきい値関数も含めて考察されている[10]．本論文で述べる正則多値論理関数は定数を許した論理式が表現する論理関数で有限の真理値を持ったものである．この意味では，定数係数を持ったｆｕｚｚｙ論理関数の特殊な場合に相当している．なお，最近，畑，中島，大和らにより，同様な研究が精力的に行われている[11]，[12]，[13]．

本論文では，まず正則多値論理関数を定義し，真理値の集合$\{0, 1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1), 1\}$に，あいまいさに関する半順序関係$\succ$を導入する．４．では，あいまいさに関する半順序関係$\succ$を利用することにより，正則多値論理関数の性質を述べる上で重要な正則多値論理関数に関する量子化定理を示す．そして，この量子化定理を利用することにより，実は正則多値論理関数は入力ベクトル$\{0, 1/2, 1\}^n$（ただし，ｍが偶数値の場合には1/2の代わりに$k=\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$とし，$k/(m-1)$を用いる．なお，$\lfloor x \rfloor$はｘ

より小さいか等しい最大の整数を表現する）上によりその値が一意的に決定されてしまうことを示す．5．で正則多値論理関数の表現定理を述べると共に，P形論理関数についても述べる

2．正則多値論理関数

まず，多値論理関数と正則多値論理関数の定義を与える．真理値の集合を $V_m=\{0,1/(m-1),\cdots,(m-2)/(m-1),1\}$ とすると，n変数のm値の多値論理関数Fは定義域 V_m^n から値域 V_m への写像 $F:\ V_m^n \to V_m$ である．ここで V_m^n は V_m のn次元直積空間を意味している．即ち，m値の多値論理関数（以下多値）であるとは $A_1,\cdots,A_n$ がそれぞれ V_m の値を取るとき $F(\mathbf{A})$（$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)\in V_m^n$）が又，$V_m$ の値を取るような論理関数であるときをいう．ここで V_m における線形順序関係 $\geq$ を図1のように定義すると，2値論理における論理演算AND（・），OR（∨）及びNOT（～）は，次のように多値論理における論理演算にそれぞれ拡張定義できる．$A,B\in V_m$ とすると，$A\cdot B=\min(A,B)$，$A\vee B=\max(A,B)$，$\sim A=1-A$．AND（・）についてはしばしば省略されることがある．V_m の値を取る論理変数 $x_1,\cdots,x_n$ と定数 $0,1/(m-1),\cdots,(m-2)/(m-1),1$ 及び上で定義され

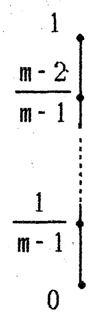

図1．線形順序関係≥

た論理演算AND(・),OR(∨),NOT(~)の結合により表現されるn変数の多値論理関数を特にn変数の正則多値論理関数と呼ぶ.即ち次のように定義される.

[定義1] (1) $0, 1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び x_i ($i = 1, \cdots, n$)は論理式である.

(2) G,Hが論理式ならばG・H,G∨H及び~Gも論理式である.

(3) 上であたえられるもののみが論理式である.

[定義2] 論理式が表現する多値論理関数を正則多値論理関数という.ただし論理変数 x_i ($i = 1, \cdots, n$)はm個の真理値 $V_m = \{0, 1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1), 1\}$ を取るものとする.

なお以下の論議において論理式とそれが表現する正則多値論理関数とを同一視することにする.また以下すべてn変数についてのみ考察するのでこのことについてはいちいちことわらないことにする.更に,これ以降真理値の集合 V_m の元で $k/(m-1)$ なる値を用いることがあるが,この値におけるkは $k = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ である.ただし $\lfloor x \rfloor$ はxより小さいか等しい最大の整数を表現する.すなわち $\lfloor x \rfloor = t$ ならばtは条件 $t \leq x \leq t+1$ を満たす唯一の整数である.とくにmが奇数のときには $k/(m-1) = 1/2$ である.

[例]　Fを正則5値論理関数とする．

$F(x_1, x_2) = \sim x_1(1/4\, x_2 \vee 3/4 \vee x_1 \sim x_2)$

$A = (1/4, 3/4) \in V_5^2$ とすると，

$F(A) = (1 - 1/4)(1/4 \cdot 3/4 \vee 3/4 \vee 1/4 \cdot (1 - 3/4))$

$\quad = 3/4 \cdot 3/4 = 3/4$

正則多値論理関数の真理値の集合 $V_m = \{0, 1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1), 1\}$ おける0，1は2値論理における偽(0)真(1)にそれぞれ対応している．また他の真理値 $\{1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1)\}$ については真偽不明である，つまり“あいまいである”と解釈される．しかもこの正則多値論理関数においては“あいまいさ”についてある程度の度合がつけられていると考えられる．つまり真理値 $1/(m-1)$ は真あるいは偽とは確定し難いがかなり偽に近い真理値であると解釈されるであろう．また同様に真理値 $(m-2)/(m-1)$ についても真あるいは偽とは確定し難いがかなり真に近い真理値であると解釈されるであろう．また，mが奇数であるときはその真理値の集合 V_m に $1/2(=k/(m-1))$ なる真理値が存在し，この真理値1/2は真偽まったく不明の状態である．つまりより真に近い，あるいはより偽に近い真理値とは解釈できないということである．また一方，mを偶数とすると奇数のときのような真偽まったく不明となるような真理値は存在しなくなり，どの真理値も必ずより真に近い

あるいはより偽に近い真理値となってしまう.このようにmを奇数で扱うか偶数で扱うかということにより正則多値論理関数の取り扱いは多少異なってくるが本質的には同じである.

正則多値論理関数においては2値論理関数と同様に次の等式が成立する.なお括弧を節約するために論理演算の間に強弱関係をもうけ～,・,∨の順に左の方ほど強いこととする.

① $A \vee B = B \vee A$,

$A \cdot B = B \cdot A$ (可換法則)

② $A \vee A = A$, $A \cdot A = A$ (べき等法則)

③ $\sim(\sim A) = A$ (二重否定)

④ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$,

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (結合法則)

⑤ $A \vee A \cdot B = A$, $A \cdot (A \vee B) = A$ (吸収法則)

⑥ $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$,

$A \vee B \cdot C = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$ (分配法則)

⑦ $\sim(A \vee B) = \sim A \cdot \sim B$,

$\sim(A \cdot B) = \sim A \vee \sim B$ (ド・モルガンの法則)

⑧ $0 \vee A = A$, $0 \cdot A = 0$ (最小元)

⑨ $1 \vee A = 1$, $1 \cdot A = A$ (最大元)

ただし, $A, B \in V_m$

しかし, $\sim A \vee A = 1$, $\sim A \cdot A = 0$ (相補則)が成立しない

のが特徴的である．相補則の代わりにそれよりも弱い等式であるクリーネ則が成立する．

⑩ $A \cdot \sim A \vee B \vee \sim B = B \vee \sim B$,

$A \cdot \sim A \cdot (B \vee \sim B) = A \cdot \sim A$　　　（クリーネ則）

また m が奇数のとき，$\sim(k/(m-1)) = k/(m-1)$，m が偶数のとき，$\sim(k/(m-1)) \neq k/(m-1)$である．なお，クリーネ代数においては，$\sim i = i$ なる真理値が存在すれば，それは唯一であることが知られている．

3．　あいまいさに関する半順序関係

正則多値論理関数は$V_m{}^n$からV_mへの写像を行う関数の中で，ある特殊な条件を満足する関数である．ここでは正則多値論理関数が満足すべき条件を考察しその性質を明らかにする．

真理値の集合V_mにあいまいさに関する半順序関係$\succ$を次のように定義する．

［定義３］　$A, B \in V_m$とするとき$A \succ B$であるのは，$1/2 \geq A \geq B \geq 0$か又は$1/2 \leq A \leq B \leq 1$なるとき，及びそのときに限る．

このあいまいさに関する半順序関係$\succ$を図に示すと，m が奇数のときには図２，m が偶数のときには図３のようになる．この関係の意味していることは m が奇数ならばV_mに1/2が存在し，この1/2があいまいさ最大，m が偶数ならばV_mに1/2が存

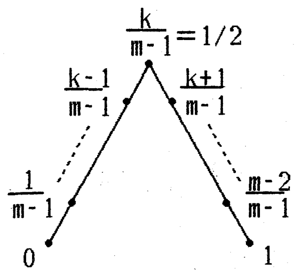

図2．あいまいさに関する半順序関係≻(mが奇数のとき)

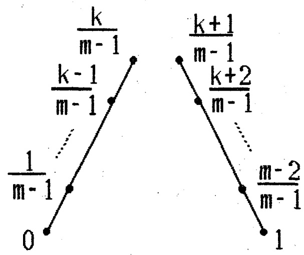

図3．あいまいさに関する半順序関係≻（mが偶数のとき）

在せずk/(m-1),(k+1)/(m-1)があいまいさに関して極大となる.またmが奇数ならばあいまいさ最大の1/2を前後として{0,…,(k-1)/(m-1)}の元と{(k+1)/(m-1),…,1}の元とは比較不可能であり,あいまいさ最大の1/2は V_m すべての元と比較可能である.mが偶数ならば{0,…,k/(m-1)}の元と{(k+1)/(m-1),…,1}の元とは比較不可能であり,V_m すべての元と比較可能な元は存在しない.つまり任意の元A,B∈ V_m についてAとBの半順序関係≻に関する最小の上界(上限)はmが奇数ならば必ず存在するが,mが偶数のときには必ずしも存在しない.

[例]　m = 5で V_5 = {0,1/4,2/4,3/4,1},

A = 1/4, B = 2/4, C = 1とすると,

B ≻ A　B ≻ C　AとCは比較不可能.

なお定義3の半順序関係≻を V_m^n の元についても次のように拡張定義する.

[定義4]　$\mathbf{A}$ = (A_1,…,A_n), $\mathbf{B}$ = (B_1,…,B_n)を V_m^n の元とするとき $\mathbf{A}$ ≻ $\mathbf{B}$ であるのは,すべてのi = 1,…,nについ

て $A_i \succ B_i$ なるとき，及びそのときに限る．

［例］ $m=5$ で $V_5{}^3=\{0,1/4,2/4,3/4,1\}^3$，

$\mathbf{A}=(0,1/4,3/4)$ $\mathbf{B}=(2/4,2/4,3/4)$ $\mathbf{C}=(0,2/4,1)$ とすると， $\mathbf{B}\succ\mathbf{A}$ $\mathbf{B}\succ\mathbf{C}$ $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ は比較不可能．

［定理１］（あいまいさにおける単調性）

Fを正則多値論理関数，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ を $V_m{}^n$ の元とするとき $\mathbf{A}\succ\mathbf{B}$ ならば $F(\mathbf{A})\succ F(\mathbf{B})$ である．

（証明） 論理演算の数に関する数学的帰納法を用いて証明する．定数 $0,1/(m-1),\cdots,(m-2)/(m-1),1$ 及び変数 x_i（$i=1,\cdots,n$）が定理を満足することは明か．t個以下の論理演算記号を含む正則多値論理関数が定理を満足しているものとする．Fを（$t+1$）個の論理演算記号を含む正則多値論理関数とする．Fは $\sim G$，$G\cdot H$，$G\vee H$ のいずれかである．いま，$\mathbf{A}\succ\mathbf{B}$ ならば $G(\mathbf{A})\succ G(\mathbf{B})$ とすると，$1/2\geq G(\mathbf{A})\geq G(\mathbf{B})$ か又は，$1/2\leq G(\mathbf{A})\leq G(\mathbf{B})$ のいずれかである．$1/2\geq G(\mathbf{A})\geq G(\mathbf{B})$ ならば，$1/2\leq 1-G(\mathbf{A})=\sim G(\mathbf{A})\leq 1-G(\mathbf{B})=\sim G(\mathbf{B})$，$1/2\leq G(\mathbf{A})\leq G(\mathbf{B})$ ならば，$1/2\geq 1-G(\mathbf{A})=\sim G(\mathbf{A})\geq 1-G(\mathbf{B})=\sim G(\mathbf{B})$，すなわち，いずれの場合も $\sim G(\mathbf{A})\succ\sim G(\mathbf{B})$ となり，$\sim G$ は定理を満足する．次に，$\mathbf{A}\succ\mathbf{B}$ ならば $G(\mathbf{A})\succ G(\mathbf{B})$，$H(\mathbf{A})\succ H(\mathbf{B})$ とすると，$1/2\geq G(\mathbf{A})\geq G(\mathbf{B})$ か又は $1/2\leq G(\mathbf{A})\leq G(\mathbf{B})$，$1/2\geq H(\mathbf{A})\geq H(\mathbf{B})$ か又は $1/2\leq$

$H(\mathbf{A}) \le H(\mathbf{B})$が成立している．いま，$1/2 \ge G(\mathbf{A}) \ge G(\mathbf{B})$，$1/2 \ge H(\mathbf{A}) \ge H(\mathbf{B})$とすると$1/2 \ge G(\mathbf{A}) \vee H(\mathbf{A}) \ge G(\mathbf{B}) \vee H(\mathbf{B})$より$(G \vee H)(\mathbf{A}) \succ (G \vee H)(\mathbf{B})$，$1/2 \ge G(\mathbf{A}) \ge G(\mathbf{B})$，$1/2 \le H(\mathbf{A}) \le H(\mathbf{B})$とすると$1/2 \le G(\mathbf{A}) \vee H(\mathbf{A}) = H(\mathbf{A}) \le G(\mathbf{B}) \vee H(\mathbf{B}) = H(\mathbf{B})$より$(G \vee H)(\mathbf{A}) \succ (G \vee H)(\mathbf{B})$となる．他のいずれの場合も同様に$(G \vee H)(\mathbf{A}) \succ (G \vee H)(\mathbf{B})$となるから，$G \vee H$は定理を満足する．$G \cdot H = \sim(\sim G \vee \sim H)$より，$\sim$，$\vee$が定理を満足しているから，$G \cdot H$も定理を満足する．以上によりすべての正則多値論理関数は定理を満足する．（証明終）

定理1により任意の正則多値論理関数は，あいまいさの関係$\succ$について単調性を満たしていることが示された．すなわち，入力がよりあいまいになれば，関数値は変わらないか又はよりあいまいさを増すということが示された．

[例]　Fを正則5値論理関数とする．$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sim x_2 \vee 2/4 \sim x_1 \sim x_3$

$\mathbf{A} = (1/4, 2/4, 3/4) \succ \mathbf{B} = (0, 1/4, 3/4)$とすると，

$F(\mathbf{A}) = 1/4 \succ F(\mathbf{B}) = 1/4$

$\mathbf{A} = (3/4, 1/4, 3/4) \succ \mathbf{B} = (3/4, 0, 1)$とすると，

$F(\mathbf{A}) = 1/4 \succ F(\mathbf{B}) = 0$

4．正則多値論理関数における量子化定理

正則多値論理関数の性質を述べる上で重要な定理である正則多値論理関数に関する量子化定理を次ぎに示す．

$V_3=\{0,1/2,1\}$としたとき，$V_m{}^n$を$V_3{}^n$で近似するとき次の定義を置く．ただし，mが偶数のときには1/2はk/(m-1)を意味するものとする．これ以降，$V_3=\{0,1/2,1\}$し1/2はmが偶数のときには先のように取り扱うことにする．

［定義5］　AをV_mの元とする．$0<\alpha\leq 1/2$なる任意の定数αに対して次のようにして得られる値$\overline{A}^{\alpha}$をαを基準にAを量子化した値という．

$\alpha\leq A\leq 1-\alpha$　ならば　$\overline{A}^{\alpha}=1/2$

$0\leq A<\alpha$　ならば　$\overline{A}^{\alpha}=0$

$1-\alpha<A\leq 1$　ならば　$\overline{A}^{\alpha}=1$

また，$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)$を$V_m{}^n$の元とするとき$\overline{\mathbf{A}}^{\alpha}$を$\overline{\mathbf{A}}^{\alpha}=(\overline{A}^{\alpha}{}_1,\cdots,\overline{A}^{\alpha}{}_n)$で定義する．

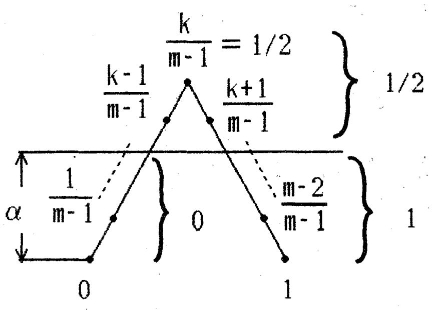

図4．αによる量子化(mが奇数のとき)

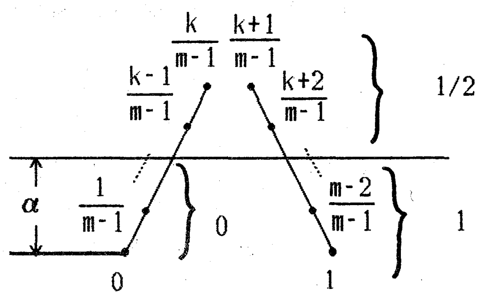

図5．αによる量子化(mが偶数のとき)

［例］$m=5$のとき，$\alpha=1/4$とすると，

$A = (2/4, 1/4, 1)$ ならば $\overline{A}^{\alpha} = (1/2, 1/2, 1)$

$m = 4$ のとき，$\alpha = 1/3$ とすると，

$A = (1/3, 2/3, 0)$ ならば $\overline{A}^{\alpha} = (1/3, 1/3, 0)$

［定理２］（正則多値論理関数に関する量子化定理）

Ｆを正則多値論理関数，Ａを $V_m{}^n$ の元とする．$0 < \alpha \leq 1/2$ なる任意の α に対して

$F\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha}) = \overline{F(A)}^{\alpha}$ である．ただし，$F\overline{c}^{\alpha}$ はＦを表現する論理式の定数を α で量子化したものである．

（証明）　論理演算の数に関する数学的帰納法を用いて証明する．定数 $0, 1/(m-1), \cdots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び変数 x_i $(i = 1, \cdots, n)$ が定理を満足することは明か．いま，ある正則多値論理関数Ｇが定理を満たすとすると（～Ｇ）も定理を満たす．なぜならば，$\overline{(\sim G)(A)}^{\alpha} = \overline{1 - G(A)}^{\alpha} = 1 - \overline{G(A)}^{\alpha} = (\sim G\overline{c}^{\alpha})(\overline{A}^{\alpha})$．次に，ある正則多値論理関数Ｇ，Ｈが定理を満たしているとき，（Ｇ∨Ｈ）も定理を満たす．なぜならば，$G(A) \geq H(A)$ とすると，$\overline{G(A)}^{\alpha} \geq \overline{H(A)}^{\alpha}$，すなわち，$G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha}) \geq H\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})$ より，$\overline{(G \vee H)(A)}^{\alpha} = \overline{G(A) \vee H(A)}^{\alpha} = \overline{G(A)}^{\alpha} = G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha}) = G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha}) \vee H\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha}) = (G\overline{c}^{\alpha} \vee H\overline{c}^{\alpha})(\overline{A}^{\alpha})$．$G(A) \leq H(A)$ としても同様．また，Ｇ，Ｈが定理を満たしているとき（Ｇ・Ｈ）も定理を満たす．なぜならば，$(G \cdot H) = \sim(\sim G \vee \sim H)$．以上により，すべての正則多値論理関数について定理が成立する．

（証明終）

定理2の意味することは，入力ベクトルと正則多値論理関数を表現する論理式の定数をある値αで量子化して出力した値と，入力ベクトルをそのまま正則多値論理関数で出力して，その出力値をある値αで量子化した値とが一致するということである．

［例］Fを正則5値論理関数とする．

$F(x)=1/4\cdot x$　$\alpha=1/4$　とする．$x=1$のとき

$\overline{F(1)}^{\alpha}=\overline{1/4\cdot 1}^{\alpha}=1/2$　$F\overline{c}^{\alpha}(\overline{1}^{\alpha})=\overline{1/4}^{\alpha}\cdot\overline{1}^{\alpha}=1/2$

［系1］　G，Hを正則多値論理関数とする．$V_3{}^n$のすべての元**A**において$G(\mathbf{A})\succ H(\mathbf{A})$なるとき，及びそのときに限り，$V_m{}^n$のすべての元**A**において$G(\mathbf{A})\succ H(\mathbf{A})$である．

（証明）　$V_3{}^n$のすべての元**A**において$G(\mathbf{A})\succ H(\mathbf{A})$と仮定する．すると，$0<\alpha\leq 1/2$なる任意の$\alpha$において$\overline{G(\mathbf{A})}^{\alpha}\succ\overline{H(\mathbf{A})}^{\alpha}$，すなわち，$G\overline{c}^{\alpha}(\overline{\mathbf{A}}^{\alpha})\succ H\overline{c}^{\alpha}(\overline{\mathbf{A}}^{\alpha})$である．このとき，$V_m{}^n$のある元**A**において$G(\mathbf{A})\nsucc H(\mathbf{A})$とする．これは，（1）$G(\mathbf{A})$と$H(\mathbf{A})$が比較不可能である．または，（2）$H(\mathbf{A})\succeq G(\mathbf{A})$のいずれかである．

（1）の場合

$G(\mathbf{A})\neq 1/2$，$H(\mathbf{A})\neq 1/2$であるから，$\overline{G(\mathbf{A})}^{1/2}$と$\overline{H(\mathbf{A})}^{1/2}$とは比較不可能．すなわち，定理2より$G\overline{c}^{1/2}(\overline{\mathbf{A}}^{1/2})$と$H\overline{c}^{1/2}$

($\overline{A}^{1/2}$)とは比較不可能である．このことは仮定に反する．

(2)の場合

(G(A)+H(A))／2＝α’と置くとき，α＝min(α’，1−α’)で量子化すると，$\overline{H(A)}^{\alpha}=1/2$，$\overline{G(A)}^{\alpha}=i$（iは0又は1）．よって，$H\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})=\overline{H(A)}^{\alpha}\geq\overline{G(A)}^{\alpha}=G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})$となり仮定に反する．

逆の場合は明らかである．(証明終)

［系2］　G，Hを正則多値論理関数とする．V_3^nのすべての元Aにおいて，G(A)≥H(A)なるとき，及びそのときに限り，V_m^nのすべての元Aにおいて，G(A)≥H(A)である．

(証明)　V_3^nのすべての元AにおいてG(A)≥H(A)と仮定する．すると，$0<\alpha\leq 1/2$なる任意のαにおいて$\overline{G(A)}^{\alpha}\geq\overline{H(A)}^{\alpha}$，すなわち，$G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})\geq H\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})$である．このとき，$V_m^n$のある元Aにおいて，G(A)$\not\geq$H(A)であるとする．これは，H(A)>G(A)であるから，(G(A)+H(A))／2＝α’と置くとき，α＝min(α’，1−α’)で量子化すると，$H\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})=\overline{H(A)}^{\alpha}>\overline{G(A)}^{\alpha}=G\overline{c}^{\alpha}(\overline{A}^{\alpha})$となり仮定に反する．逆の場合は明らかである．(証明終)

正則多値論理関数は入力ベクトルV_m^nの元に対して1つの値が定まるものであるが，実はこの論理関数は次に述べるように入力ベクトルV_3^nの元に対する値ですべての値が一意的に

定まってしまうものである．つまり，正則多値論理関数は本質的に$V_3{}^n$の元で決定されているのである．

［定理３］　G，Hを正則多値論理関数とする．$V_3{}^n$のすべての元Aにおいて，G（A）＝H（A）なるとき，及びそのときに限り，$V_m{}^n$のすべての元Aにおいて，G（A）＝H（A）である．

（証明）系２より明か．（証明終）

定理３が証明されたことにより，正則多値論理関数は入力ベクトル$V_3{}^n$の元における値ですべての値が一意的に定まることが保証されたことになる．

［例］　正則４値論理関数を$F_1 = x \cdot \sim x$，$F_2 = 1/3x \cdot \sim x$とする．いま，$V_4 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$のすべての元Aにおいて，F_1（A）＝F_2（A）である．また，$V_3 = \{0, 1/3, 1\}$のすべての元Aにおいて，F_1（A）＝F_2（A）である．

５．　正則多値論理関数における表現定理とP形論理関数

次に，正則多値論理関数の表現定理（２値論理関数のシャノン展開に相当する）について述べる．正則多値論理関数では，分配則，べき等則等が成立するので任意の正則多値論理関数は加法形式に展開できる．ただし，相補法則が成立しないので，ある変数について肯定，否定を同時に含む項が存在する．これらを次ぎに定義する．

［定義６］　変数x_iまたは変数の否定$\sim x_i$を文字といい，同

じ文字を二度以上含まない文字のANDを積項という．積項のうち，ある変数について肯定，否定両方を同時に含まないものを単積項，含むものを相補積項という．

［定義7］　すべての変数が現われるような相補積項を相補最小項と呼ぶ．

次に，単積項と相補最小項の性質について述べる．

［定義8］　$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)\in V_3^{\,n}$ に対応する単積項 α とは，　$x_1^{A_1}\cdot\cdots\cdot x_n^{A_n}$

ただし，　$A_i=0$　のとき　$x_i^{A_i}=\sim x_i$

$A_i=1$　のとき　$x_i^{A_i}=x_i$

$A_i=1/2$　のとき　$x_i^{A_i}=1$　　なる式をいう．

上で定義した集合 $V_3^{\,n}$ の元と単積項との対応は明らかに一対一対応である．

［定義9］　$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)\in V_3^{\,n}-V_2^{\,n}$ に対応する相補最小項 β とは，　$x_1^{A_1}\cdot\cdots\cdot x_n^{A_n}$

ただし，　$A_i=0$　のとき　$x_i^{A_i}=\sim x_i$

$A_i=1$　のとき　$x_i^{A_i}=x_i$

$A_i=1/2$　のとき　$x_i^{A_i}=x_i\cdot\sim x_i$

なる式をいう．

上で定義した集合$V_3{}^n - V_2{}^n$の元と相補最小項との対応は明らかに一対一対応である．

［定理4］（正則多値論理関数の表現定理）

Fを正則多値論理関数とする．このとき，

$$F(x) = \bigvee_{A \in V_3{}^n} \{ \bigwedge_{A \succ A'} F(A')\cdot\alpha_A(x) \vee F(A)\cdot\beta_A(x)\}$$

$F(A)\cdot\beta_A(x)\}$ が成立する．ただし，α_AはAに対応する単積項，β_AはAに対応する相補最小項（$A \in V_2{}^n$のときには$\beta_A = 0$とする）である．（証明略）

上の定理を1変数に適用すると$F(x) = F(0)\sim x \vee F(1)\cdot x \vee F(0)F(1)F(1/2) \vee F(1/2)x \sim x$となる．よって，任意のn変数の正則多値論理関数において，$V_m{}^n$の元$A = (A_1, \cdots, A_{i-1}, x_i, A_{i+1}, \cdots, A_n)$に対して$A_1, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$をそれぞれ$V_m$の元に固定し，$x_i$を変数とすると，一般に$F(x_i) = F_0 \sim x_i \vee F_1 x_i \vee F_0 F_1 F_{1/2} \vee F_{1/2}\cdot x_i \sim x_i$となる[13]．ただし，

$F_0 = F((A_1, \cdots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \cdots, A_n))$

$F_1 = F((A_1, \cdots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}, \cdots, A_n))$

$F_{1/2} = F((A_1, \cdots, A_{i-1}, 1/2, A_{i+1}, \cdots, A_n))$

である．

次に，正則多値論理関数にをけるP形論理関数について述べ

る．

正則多値論理関数F_1とF_2が，入力ベクトル$V_2{}^n=\{0,1\}^n$のみで見たとき等しいとき，次の定義を置く．

［定義10］　正則多値論理関数F_1とF_2が$V_2{}^n$のすべての元$\mathbb{A}$において$F_1(\mathbb{A})=F_2(\mathbb{A})$なるとき，$F_1$と$F_2$とは$V_2$－equivalentであるという．Fと$V_2$－equivalentである正則多値論理関数からなる集合をVeq(F)で表す．

次に，ある正則多値論理関数Fから次のような3値論理関数$f_s{}^3$を定義する．

［定義11］　正則多値論理関数をFとする．$V_2{}^n$のすべての元$\mathbb{A}$において，

$$f_s(\mathbb{A})=\begin{cases}1 & F(\mathbb{A})\geq s/(m-1)\\ 0 & \text{その他のとき} \qquad \text{ただし，} S=1,\cdots,m-1\end{cases}$$

なる2値論理関数を考える．この2値論理関数f_sを主項(Prime implcant)展開した論理式が表現する3値論理関数を$f_s{}^3$と記すことにする．$f_s{}^3$はP形のB－3値論理関数である(1)．

$V_3=\{0,1/2,1\}$あいまいさに関する半順序関係$\succ$を導入する．

［定義12］　$1/2\succ 0$，$1/2\succ 1$，$i\succ i\in V_3$．0と1は比較不可能である．また，$V_3{}^n$の元にまで次のように拡張定義する

．$\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)$，$\mathbf{B}=(B_1,\cdots,B_n)$ を$V_3{}^n$の元とするとき$\mathbf{A}\succ\mathbf{B}$であるのは，すべての$i=1,\cdots,n$について$A_i\succ B_i$なるとき，及びそのときに限る．

次に，B－3値論理関数における性質をいくつか述べる．集合$V_3{}^n$はあいまいさについての関係$\succ$に関して，半順序集合をなしている．半順序集合$V_3{}^n$における極大元は$(1/2,\cdots,1/2)$で，最大元となる．極小元は2^n個存在して，それは$V_2{}^n$の元である．

［定義13］　$\mathbf{A}\in V_3{}^n$において，$\mathbf{A}$が含むすべての極小元からなる集合を$\mathbf{A}^*$で表すことにする．すなわち，$\mathbf{A}^*=\{\mathbf{A}'\mid\mathbf{A}\succ\mathbf{A}'\in V_2{}^n\}$．B－3値論理関数$f_s{}^3$において，$f_s{}^3(\mathbf{A}^*)$で$f_s{}^3(\mathbf{A}')$のとる値の集合を表すことにする．すなわち，$f_s{}^3(\mathbf{A}^*)=\{f_s{}^3(\mathbf{A}')\mid\mathbf{A}\succ\mathbf{A}'\in V_2{}^n\}$.

$f_s{}^3$は，B－3値論理関数におけるP形論理関数と同じ表現であった．よって，

［補題1］　B－3値論理関数$f_s{}^3$は次の条件を満足する．

(1) $f_s{}^3(\mathbf{A})=1/2 \rightleftarrows f_s{}^3(\mathbf{A}^*)=\{1,0\}$

(2) $f_s{}^3(\mathbf{A})=1 \rightleftarrows f_s{}^3(\mathbf{A}^*)=\{1\}$

(3) $f_s{}^3(\mathbf{A})=0 \rightleftarrows f_s{}^3(\mathbf{A}^*)=\{0\}$

ただし，$\mathbf{A}\in V_3{}^n$（証明略）

定義11と補題1により，$f_1{}^3\supseteq\cdots\supseteq f_{m-1}{}^3$なる関係が存在

する．ここで，正則多値論理関数に関するP形論理関数を定義する．

［定義14］　正則多値論理関数FがP形論理関数であるのはVeq(F)のすべての元F’において，F’≻Fなるとき，及びそのときに限る．ただし，F’≻FであるとはV_m^nのすべての元$\mathbf{A}$において，F’($\mathbf{A}$)≻F($\mathbf{A}$)であるとき，及びそのときをいう．

［定理5］　ある正則多値論理関数FとV_2－equivalentなP形論理関数F_Pは，

$F_P=\frac{1}{m-1}f_1{}^3\vee\cdots\vee\frac{i}{m-1}f_i{}^3\vee\cdots\vee f_{m-1}{}^3$　である．

（証明略）

$V_3=\{0,1/2,1\}$において真理値1/2を0か1かわからない，不確定な状態を表す真理値とする．つまり，標準な入力ベクトルはその元が0又は1からなる$V_2{}^n$の元となる．ここである正則多値論理関数Fを考える．いま，入力ベクトル$\mathbf{A}_1$=(1，0，0)，$\mathbf{A}_2$=(1，1，0)に対してF($\mathbf{A}_1$)=F($\mathbf{A}_2$)=1とする．ここで，$\mathbf{A}_3$=(1，1/2，0)なる入力ベクトルを考えると$\mathbf{A}_3$の2番目の元は0か1かわからない不確定な状態である．しかしながら$\mathbf{A}_3$の不確定な状態が確定されたときに取ると考えられる$V_2{}^n$の元は，$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$である．そして，いまF($\mathbf{A}_1$)=F(

A_2)＝1であるのにF（A_3)が1以外の値を取るとしたならば，これはある意味で情報が失われたと考えられる．P形論理関数は入力ベクトルに不確定な状態が現れても，その情報の損失を最小にする正則多値論理関数といえる．

［例］ 正則5値論理関数Fを考える．V_2^2の元における出力が表1のようであったとする．FとV_2－equivalentなP形論理関数F_PはF_P＝$1/4(x_1 \vee x_2) \vee 2/4x_1 \vee x_1 \sim x_2$である．この真理値表は表2の通りとなる．なお，上式は $F_P = 1/4x_2 \vee 2/4x_1 \vee x_1 \sim x_2$と簡単化される．簡単化のアルゴリズムについては既に知られているが，ここでは省略する．

x_2 \ x_1	0	1
0	0	1
1	1/4	2/4

表1．FのV_2^2の元における出力

x_2 \ x_1	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	2/4	3/4	3/4
2/4	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4
3/4	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4
1	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4

表2．FとV_2-equivalentなP形論理関数の真理値表

奇数値の正則多値論理関数の場合（偶数の場合にも同様に考

察できる)に,P形の正則多値論理関数には,次の性質がある.

[定理6] F_P をP形の正則多値論理関数とする.このとき,

$V_3{}^n$ のすべての元 $\mathbf{A}$ について,$F_P(\mathbf{A}) = \bigvee_{\mathbf{A}' \in \mathbf{A}^*} F_P(\mathbf{A}')$

ここで,∨は図2の半順序集合における上限を表している.

(証明略)

定理3より正則多値論理関数の値は $V_3{}^n$ の入力に対する値で一意的に定まってしまい,P形の場合には,特に上の定理から分かるように,$\mathbf{A}^*$ の元,すなわち0と1のみからなる $V_2{}^n$ の入力に対する値で一意的に定まってしまうことが分かる.

参考文献

(1)向殿:“B-三値論理関数について…あいまいさを考慮した三値論理関数”,信学論　,vol.55-D,NO.6(1972)

(2)M.mukaidono and I.G.Rosenberg:“k-valude functions for treating ambiguities…Their clone and a nomal form”,Proc. 10-th ISMVL(1986)

(3)向殿:“Fuzzy論理関数における二,三の性質について”,信学論,vol.58-D,NO.3 (1975)

(4)向殿:“Fuzzy論理関数の代数的構造とその最簡形式及び既約形式”,信学論,vol.58-D,NO.12(1975)

(5)M.Mukaidono:“Regular ternary logic functions…Ternary logic functions for treating ambiguity”, IEEE Trans. Comput. vol.c-35,NO.2(1986); Proc. 13-th ISMVL(1983)

(6)荒木:“定数係数を持ったfuzzy論理関数の研究”,昭和61年度明治大学大学院工学研究科修士論文(1987)

(7)Y.Yamamoto and M.Mukaidono:“P-Ternary logic functions…Ternary logic functions capable of correcting input failures”,Proc. 17-th ISMVL (1987)

(8)Y.Yamamoto and M.Mukaidono:“Ambiguity decision tables and P-ternary logic functions”,Prco.

18-th ISMVL(1988)
(９)山本,藤田:“３値多数決関数”,信学論 ,j63-D,NO.6 (1980)
(１０)Y.Yamamoto and M.mukaidono:“Meaningful special classes of ternary logic functions… Regular ternary logic functions and ternary majority functions”,Trans. Comut. vol.37,NO.7 (1988)
(１１)畑,中島,大和,北橋:“２値入力Ｐ値出力関数から生成されるＰ値論理関数とその論理式決定”,信学論, vol.j71-D,NO.12(1988)
(１２)大和,中島,畑,佐藤:“２値入力Ｐ値出力関数からＰ値論理関数を得るための生成規則について”,多値論理研究ノート,vol.10,NO.3(1988)
(１３)大和,中島,畑,佐藤:“多値ＡＮＤ,ＯＲ,ＮＯＴ,定数によって表現される多値論理関数の必要十分条件とその論理式決定”,多値論理研究ノート,vol.11,NO.8 (1989)